

# FORMFAKTOR UND FORMWIDERSTAND DER STATIONÄREN MEHRDIMENSIONALEN WÄRMELEITUNG

E. HAHNE

Institut für Thermodynamik und Wärmetechnik, Universität Stuttgart, D 7 Stuttgart 1,  
Seidenstr. 36, West Germany

and

U. GRIGULL

Institut A für Thermodynamik, Technische Universität München, D 8 München 2,  
Postf. 202420, West Germany

(Received 31 January 1975)

**Zusammenfassung**—Potentialverteilungen sind für eine Reihe von Anordnungen berechnet und in der Literatur angegeben. Diese Lösungen werden kritisch gesichtet und ihre Gemeinsamkeiten herausgearbeitet. Die Abtrennung von anwendungsspezifischen Stoffgrößen führt auf den Formfaktor, der allein von der geometrischen Anordnung abhängt und für alle Vorgänge Gültigkeit hat, denen skalare Potentialfelder zugrundeliegen.

Die Berechnung des Wärmestromes bei stationärer Wärmeleitung stand hier im Vordergrund. Sie ist, bei Kenntnis des Formfaktors auch für komplizierte geometrische Anordnungen sehr einfach. Da Angaben über Formfaktoren in der Literatur gelegentlich verwirrend und mehrdeutig sind, ist hier auf eine konsequente Einteilung entsprechend den auf analytische Lösungen zurückgehenden Fällen der planparallelen Platte, der coaxialen Rohre und der Kugel geachtet. Die Charakteristika dieser Lösungen sind in jedem angegebenen Formfaktor enthalten.

Eine besonders einfache Möglichkeit der Ermittlung von Formfaktoren für Anordnungen von Einzelkörpern wird gezeigt. Damit und mit der Möglichkeit der Vertauschung von Isothermen und Adiabaten, sowie der symmetrischen Ergänzung können die hier angegebenen rund 50 Formfaktoren Grundlage einer Vielzahl von geometrischen Anordnungen sein.

## BEZEICHNUNGEN

$a, b$ ,	Ellipsenhalbachsen;
$A$ ,	Isothermenabstand, Achsabstand;
$A^*$ ,	Abstandsfunktion;
$c$ ,	halber Ellipsenbrennpunktabstand;
$D$ ,	Dicke;
$E$ ,	vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung;
$F$ ,	isotherme Fläche quer zum Wärmestrom;
$F^*$ ,	Formkoeffizient;
$F_L^*$ ,	Formfaktor $F^*/L$ ;
$H$ ,	Isothermenhöhe;
$k$ ,	Modul des elliptischen Integrals;
$k'$ ,	Komodul $\sqrt{1-k^2}$ ;
$K$ ,	vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung;
$K'$ ,	vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung für den Komodul $k'$ ;
$L$ ,	Länge;
$p$ ,	Potential;
$r, R$ ,	Radius;
$R^*$ ,	Formwiderstand;
$LR^*$ ,	Formwiderstandsfaktor $1/F_L^*$ ;
$t$ ,	Temperatur;
$u, v$ ,	Koordinaten;
$x, y, z$ ,	Koordinaten;
$sn, cn, dn$ ,	sinus, cosinus, delta amplitudinis [9];
$zn$ ,	Jakobische Zetafunktion [9];
$\vartheta$ ,	dimensionslose Übertemperatur $(t-t_2)/(t_1-t_2)$ ;
$\vartheta_0(u, \tau)$ ,	Thetafunktionen [9, 10];

$\lambda$ , Wärmeleitfähigkeit;

$\phi$ , Wärmestrom.

## Indices

0, Hilfswert;

1, 2, isotherme Berandungen;

$K$ , Einzelkugel im unendlich ausgedehnten Medium;

$2K$ , zwei gleiche Kugeln im unendlich ausgedehnten Medium;

$L$ , bezogen auf Länge;

$r$ , bezogen auf Radius.

## 1. EINLEITUNG

EINE Reihe physikalischer Vorgänge lassen sich mit der Vorstellung skalarer Potentialfelder verbinden. Vorgänge dieser Art sind die der Elektrostatik, der Elektrodynamik, der Magnetostatik, der reibungsfreien Flüssigkeitsströmung und der Wärmeleitung in festen Körpern. Ihren Feldern gemeinsam ist ein skalarer Wert  $p$ , der einer Laplaceschen Differentialgleichung genügt, wie das elektrostatische, elektrische, magnetostatische Potential, das Geschwindigkeitspotential oder die Temperatur.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Eine große Zahl von Lösungen für verschiedene geometrische Gebilde findet sich verstreut in der Literatur, besonders jener der Mathematik und

Elektrotechnik. Diese Lösungen sind stets mit anwendungsspezifischen Stoffgrößen verbunden, so daß ihr allgemeingültiger, nur noch formabhängiger Charakter nicht unmittelbar hervortritt. Eine relativ geringe Zahl sogenannter Formfaktoren oder Leitwiderstände, meist aus elektrotechnischen Untersuchungen stammend, ist in einigen Werken der Wärme- und Stoffübertragung [1-4] angegeben. Es wird hier versucht, bekannte Lösungen kritisch zu sichten und so zu ordnen, daß Gemeinsamkeiten erkennbar und ihre Anwendung erleichtert werden. Die Möglichkeit, in ebenen Feldern Stromlinien und Aquipotentiallinien zu vertauschen, ohne die Gültigkeit von Gl. (1) aufzugeben, oder die Addition von Teilströmen bei symmetrischen Gebilden, erlauben die Erweiterung der hier zusammengestellten Lösungen auf eine Vielzahl von Problemen. Für die folgenden Betrachtungen standen die Vorgänge der stationären Wärmeleitung im Vordergrund, weshalb die Nomenklatur dieses Gebietes verwendet wird. Die in den Tabellen zusammengestellten Ergebnisse sind aber für alle oben angeführten physikalischen Vorgänge gültig.

## 2. FORMKOEFFIZIENT UND FORMFAKTOR, FORMWIDERSTAND UND FORMWIDERSTANDSAKTOR

Nach der Gleichung von Fourier gilt für den stationären Wärmestrom  $d\phi$ , der durch ein isothermes Flächenelement  $dF$  tritt,

$$d\phi = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF \quad (2)$$

Dabei kennzeichnet  $\partial t/\partial n$  den Temperaturgradienten in Normalenrichtung und  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit des betrachteten homogenen isotropen Materials. Für einen Körper bekannter Form, durch den von einer isothermen Berandung mit der Temperatur  $t_1$  zu einer anderen isothermen Berandung mit der Temperatur  $t_2$  ein Wärmestrom hindurchtritt, läßt sich eine dimensionslose Übertemperatur  $\vartheta = (t - t_2)/(t_1 - t_2)$  einführen, und es gilt

$$\phi = -\lambda(t_1 - t_2) \int_F (\partial\vartheta/\partial n) dF. \quad (3)$$

In Gleichung (3) sind drei Koeffizienten erkennbar: die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , die vorgegebene Temperaturdifferenz  $(t_1 - t_2)$  und das Integral

$$\int_F (\partial\vartheta/\partial n) dF = F^*, \quad (4)$$

das allein von der Form des Körpers abhängt und die Dimension einer Länge aufweist. Das Integral sei deshalb Formkoeffizient  $F^*$  genannt. Man kann sich diesen Formkoeffizienten als den Quotienten aus einer mittleren wärmedurchströmten Fläche und der mittleren Länge der Wärmestromröhren vorstellen, was für erste Abschätzungen nützlich sein kann. Hängt das Temperaturfeld in einem Körper nur von zwei Dimensionen ab, wie bei langen röhrenförmigen oder prismatischen Körpern, so kann man den Formkoeffizienten auf die Länge  $L$  des Rohres oder des

Prismas beziehen und erhält den Formfaktor als reine Zahl

$$F_L^* = F^*/L. \quad (5)$$

Ein Formfaktor für Probleme der stationären Wärmeleitung wurde vermutlich erstmalig von Langmuir und Mitarbeitern [5] eingeführt. Der Vorteil besteht darin, daß alle Schwierigkeiten, die bei der Berechnung von Wärmeströmen in geometrisch komplizierten Gebilden auftreten, allein in die Bestimmung dieses Faktors gelegt werden können.

Die Potentialverteilung und damit der Formfaktor können analytisch, numerisch oder experimentell bestimmt werden. Der für eine bestimmte geometrische Anordnung einmal ermittelte Formfaktor ist für beliebige Temperaturdifferenzen und Materialien gültig.

Häufig ist es zweckmäßig, mit dem Kehrwert des Formkoeffizienten zu rechnen, den wir den Formwiderstand

$$R^* = 1/F^* \quad (6)$$

nennen wollen. Als dimensionsloser Formwiderstandsfaktor ergibt sich

$$LR^* = L/F^* = 1/F_L^* \quad (\text{Tab. 2, Tab. 3}) \quad (7)$$

$$\text{bzw. } rR^* = r/F^* = 1/F_r^* \quad (\text{Tab. 3, Tab. 4})$$

Der Wärmestrom  $\phi$  zwischen zwei Isothermen mit den Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  in einem Medium der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  ist danach

$$\phi = F^*\lambda(t_1 - t_2) \quad (8)$$

oder bei Verwendung des auf die Länge  $L$  bezogenen Formfaktors  $F_L^* = F^*/L$

$$\phi = LF_L^*\lambda(t_1 - t_2). \quad (8a)$$

## 3. VERTAUSCHUNG DER RANDBEDINGUNGEN UND ZUSAMMENGESetzte TEILSYSTEME

In ebenen Potentialfeldern sind Strom- und Potentiallinien vertauschbar, so daß adiabate Berandungen in isotherme und umgekehrt übergeführt werden können.

Der Formfaktor  $F_L^+$  der vertauschten Anordnung bzw. der Formwiderstandsfaktor  $LR^+$  nimmt die Größe des Kehrwerts der Originalanordnung an:

$$F_L^+ = 1/F_L^* = LR^* \text{ bzw. } LR^+ = 1/LR^* = F_L^*. \quad (9)$$

Der Formfaktor der Anordnung nach der Vertauschung bzw. der zugehörige Formwiderstandsfaktor haben den Wert des Formwiderstandsfaktors bzw. des Formfaktors vor der Vertauschung der Randbedingungen. Das läßt sich anschaulich für die planparallele Platte des Falles 1, Tabelle 1, zeigen, wo sich durch Vertauschung der Randbedingungen der Formfaktor  $F_L^+ = A/H = 1/F_L^*$  ergibt.

Die Formfaktoren von Teilsystemen, die durch die beiden gleichen Isothermen begrenzt sind und die sich längs Wärmestromlinien zusammensetzen lassen (Reihen- oder Parallelschaltung), addieren sich zum Gesamtformfaktor des zusammengesetzten Systems nach der Beziehung

$$(F_L^*)_{\text{ges}} = (F_L^*)_I + (F_L^*)_{II} + (F_L^*)_{III} + \dots \quad (10)$$

Bei Teilsystemen, die von den gleichen Wärmestromlinien begrenzt sind und die sich längs Isothermen zusammensetzen lassen (Serien- oder Hintereinanderschaltung), addieren sich die einzelnen Formwiderstandsfaktoren zum Gesamtformwiderstandsfaktor nach der Beziehung

$$\begin{aligned} (LR^*)_{\text{ges}} &= (LR^*_I) + (LR^*_{II}) \\ &+ (LR^*_{III}) \dots = (1/F_L^*)_{\text{ges}} \quad (11) \\ &= 1/(F_L^*)_I + 1/(F_L^*)_{II} + 1/(F_L^*)_{III} + \dots \end{aligned}$$

4. TEMPERATURABHÄNGIGE WÄRMELEITFÄHIGKEIT

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf Systeme mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Durch eine von Kirchhoff [6] angegebene Transformation lassen sich Lösungen von Gl. (1) für konstantes  $\lambda$  auch für den Fall  $\lambda = \lambda(t)$ , also für temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit nutzbar machen.

Durch die Beziehung

$$\lambda(t) dt = \lambda_k dh \quad (12)$$

wird eine (noch zu berechnende) konstante Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_k$  eingeführt, sowie eine zunächst unbekannte Hilfsfunktion  $h$  von der Dimension Temperatur. Durch Integration von Gl. (12) erhält man für  $\lambda_k$  die Beziehung

$$\lambda_k = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt. \quad (13)$$

Verfügt man über die Hilfsfunktion  $h$  derart, daß sie an zwei Stellen mit der wahren Temperatur  $t$  übereinstimmen soll, wofür man zweckmäßig die Temperatur der beiden das System begrenzenden Isothermen  $t_1$  und  $t_2$  wählt, (die zugleich die höchste und die niedrigste Temperatur des Systems bedeuten), so ergibt sich für  $\lambda_k$  der integrale Mittelwert von  $\lambda(t)$ , nämlich

$$\lambda_k = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt. \quad (14)$$

Unter Verwendung dieses Wertes von  $\lambda_k$  bleiben alle Konsequenzen aus der Laplace-Gleichung (1), also auch das Konzept des Formfaktors  $F_L^*$  und des Formwiderstandsfaktors  $LR^*$  bei temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(t)$  streng gültig.

Bei Stoffen mit stark temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(t)$ , die zugleich in weiten Temperaturbereichen angewendet werden, (z. B. Kernbrennstoffen), kann es zweckmäßig sein, statt  $\lambda(t)$  die integrale Wärmeleitfähigkeit

$$\Lambda_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \quad (15)$$

zu tabellieren (SI-Einheit von  $\Lambda$  ist W/m).

Der Wärmestrom  $\phi$  für eine bestimmte Anordnung mit dem Formkoeffizient  $F^*$  wird dann einfach

$$\phi = \Lambda_{12} F^*. \quad (16)$$

Hängt die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  (in hinreichender Näherung) linear von der Temperatur ab, etwa nach der Beziehung

$$\lambda(t) = \lambda_0(1 + \beta t) \quad (17)$$

so wird

$$\lambda_k = \lambda_0[1 + \beta(t_1 + t_2)/2]. \quad (18)$$

Das bedeutet, daß man in diesem Fall mit der Wärmeleitfähigkeit bei der arithmetischen Mitteltemperatur  $(t_1 + t_2)/2$  rechnen kann.

5. EINTEILUNG DER FORMFAKTOREN

Im Folgenden werden Formfaktoren betrachtet, die sich aus einer beliebigen Anordnung von zwei Isothermen unterschiedlicher Temperatur ergeben. Bei drei Isothermenstücken sollen sich stets zwei auf gleicher Temperatur befinden.

Ausgehend von den drei einfachen, allgemein bekannten Formfaktoren

- (a) dem der ebenen Platte  $F_L^* = H/A$
- (b) dem der coaxialen Kreisrohre  $F_L^* = 2\pi/\ln(r_2/r_1)$
- (c) dem der konzentrischen Kugelschalen

$$F_{r_2}^* = 4\pi \left/ \left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \right.$$

werden drei Familien von Formfaktoren unterschieden:

- (aa) Platten und Bänder
- (bb) Rohre und Drähte
- (cc) Einzelkörper.

Durch Aneinanderreihen von zylindrischen Quellen ergeben sich wärmeabgebende Platten und Bänder. Den Fällen "Rohre und Drähte" liegen einzelne zylindrische Wärmequellen zugrunde; diese Anordnungen sind durch die Konstante  $2\pi$  gekennzeichnet. Die Fälle der Einzelkörper gehen auf kugelförmige Wärmequellen zurück, mit  $4\pi$  als kennzeichnender Zahl.

Eine eindeutige Zuordnung ist nicht möglich für Kombinationen aus den oben angeführten Familien, wie zylindrischen Rohren in Quadern, die im Querschnitt das Bild eines Kreises in einem Rechteck liefern, oder für kurze Rohrstücke, die zwischen dem zweidimensionalen Fall des unendlich langen Rohres und dem dreidimensionalen Fall der Kugel liegen. Für solche Anordnungen wird die Zuordnung nach Charakteristiken des Formfaktors getroffen, wobei die Zahl  $2\pi$  die Herleitung aus zylindrischen Quellen und  $4\pi$  aus Kugelquellen anzeigen soll. Um diesen Ursprung auch noch im resultierenden Formfaktor erkennen zu lassen, wurden die Zahlen  $2\pi$  und  $4\pi$  im Quotienten nicht gekürzt.

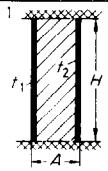
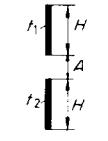
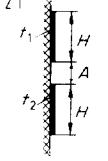
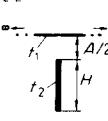
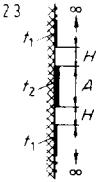
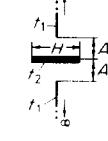
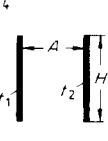
6. ZYLINDERQUELLEN

6.1. Platten und Bänder (Tabelle 1)

In der langen planparallelen Platte ist das Temperaturfeld nur von einer Koordinate abhängig, und der Formfaktor läßt sich unmittelbar aus Gl. (4) errechnen:

$$F_L^* = F^*/L = H/A \quad (19)$$

Dabei ist  $L$  die sehr große Plattenlänge,  $H$  die Isothermenhöhe und  $A$  der Isothermenabstand. Diese

Tabelle 1 Platten und Bänder					
geometr. Form	Formfaktor	Bemerkungen	Näherung	Literatur	
	Planparallele Platte Isothermenhöhe $H$ Isothermenabstand $A$ Länge $L \gg A$	$F_L^* = H/A$	aus Gl. (4)		
	Zwei nebeneinander liegende Bänder Bandbreite $H$ Abstand $A$ Länge $L \gg A$	$F_L^* = \frac{K'}{K}$	$K, K'$ vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung $k = A/(2H+A)$ $k$ Modul des elliptischen Integrals	für $A/H \ll 1$ $F_L^* \approx \frac{4}{2\pi} \ln [4(1+2H/A)]$ für $A/H \gg 1$ $F_L^* \approx \frac{2\pi}{\ln [4(2+A/H)]}$	[9] [11] [12]
	Zwei nebeneinander liegende Bänder im halbunendlichen Raum	$F_L^* = \frac{1}{2} \frac{K'}{K}$	$k$ wie Fall 2 $K, K'$ vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung	wie Fall 2, aber jeweils halber Wert für $F_L^*$	
	Band senkrecht unter Erdoberfläche	$F_L^* = 2 \frac{K'}{K}$	$k$ wie Fall 2	wie Fall 2, aber jeweils doppelter Wert für $F_L^*$	
	Band fluchtend zwischen unendlich breiten Platten im halbunendlichen Raum	$F_L^* = 2 \frac{K'}{K}$	$k$ wie Fall 2	wie Fall 2, aber jeweils das Doppelte des dortigen Kehrwerts	
	Band quer zwischen zwei unendlich breiten fluchtenden Platten	$F_L^* = 4 \frac{K'}{K}$	$k = 1/\sqrt{1+(A/H)^2}$	für $A/H \ll 1$ $F_L^* \approx \frac{8}{2\pi} \ln [16(1+H^2/A^2)]$ für $A/H \gg 1$ $F_L^* \approx \frac{2\pi}{\ln \sqrt{16(1+A^2/H^2)}}$	[9] [11]
	Zwei parallele Platten im ausgedehnten Medium	$F_L^* = \frac{K'}{K}$	$k$ aus $zn(u_1, k) = \frac{\pi H}{2K \cdot A}$ $zn$ Jakobische Zetafunktion	für $H/A \gg 1$ $F_L^* \approx H/A$ für $H/A \ll 1$ $F_L^* \approx \frac{2\pi}{\ln [4(A/H)^2]}$	[9]

fortgesetzt S. 755

Bezeichnungen wurden—wo immer möglich—in Tabelle 1 beibehalten. Die dort dargestellten isothermen Bänder haben gegenüber anderen Abmessungen vernachlässigbare Dicke, aber stets sehr große Länge  $L$  senkrecht zur Darstellungsebene. Diese Bandanordnungen lassen sich durch konforme Abbildung mit Hilfe der Transformation nach Schwarz-Christoffel auf planparallele Plattenanordnungen wie im Fall 1, Tabelle 1, zurückführen. Aus dieser transformierten Anordnung ist ihr Formfaktor unmittelbar nach Gl. (19) abzulesen.

Für zwei an einer wärmedichten Wand nebeneinander liegende, lange Bänder (Fall 2.1, Tabelle 1) sei das Vorgehen an Hand von Bild 1 gezeigt: Die Originalanordnung nach Bild 1(a) wird in die Grundanordnung nach Bild 1(b) übergeführt.

Die Transformationsgleichung

$$z = C \int_{u_1}^{u_2} \frac{dw}{\sqrt{[(w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)(w-w_4)]}} \quad (20)$$

bildet die obere  $w$ -Halbebene (Bild 1b) in ein Rechteck der  $z$ -Ebene (Bild 1c) ab. Mit der Zuordnung der Punkte  $w_1 \rightarrow -1/k$ ,  $w_2 \rightarrow -1$ ,  $w_3 \rightarrow 1$ ,  $w_4 \rightarrow 1/k$  erhält man aus Gl. (20)

$$z = \int_{u_1}^{u_2} \frac{dw}{\sqrt{[(1-w^2)(1-k^2w^2)]}} \quad (21)$$

das elliptische Integral 1. Gattung mit dem Modul  $k$ , der mit den geometrischen Größen aus Bild 1(a) gegeben ist durch

$$k = A/(A+2H) \quad (22)$$

Fortsetzung Tabelle 1

	Band quer zwischen zwei unendlich breiten parallelen Platten	$F_L^* = 4 \frac{K'}{K}$	$k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{H}{A}\right)$	für $A/H \approx 1$ $F_L^* = \frac{16}{2\pi} \ln \frac{8}{1-H/A}$ für $A/H \gg 1$ $F_L^* \approx \frac{2\pi}{\ln(8A/\pi H)}$	[9]
	Band parallel zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten	$F_L^* = 4 \frac{K'}{K}$	$k = 1/\cosh\left(\frac{\pi H}{2A}\right)$	für $A/H \ll 1$ $F_L^* \approx \frac{16}{2\pi} (\ln 2 + \frac{\pi H}{2A})$ für $A/H \gg 1$ $F_L^* \approx \frac{2\pi}{\ln(8A/\pi H)}$	[9] [12]
	Band in einem Rechteckkörper	$F_L^* = 4 \frac{K'}{K}$	$k = \text{cn}\left[K_0 \frac{h}{H}, K_0\right]$ $k$ aus $\frac{K_0}{K'_0} = \frac{H}{A}$		[9]
	Band im quadratischen Körper	$F_L^* = 4 \frac{K'}{K}$	$k = \text{cn}\left(1,854 \frac{h}{H}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	für $H/h = 1$ $F_L^* \approx \frac{16}{2\pi} \ln \frac{3,06}{1-H/h}$ für $H/h \gg 1$ $F_L^* \approx \frac{2\pi}{\ln(2,16 \cdot H/h)}$	[9]
	Band in kreiszylindrischem Rohr	$F_L^* = 4 \frac{K'}{K}$	$k = \frac{1 - (h/R)^2}{1 + (h/R)^2}$	für $R/h = 1$ $F_L^* \approx \frac{16}{2\pi} \ln \frac{4}{1-h/R}$ für $R/h \gg 1$ $F_L^* \approx \frac{2\pi}{\ln 2R/h}$	[9] [11] [12]
	berippte Platte	$F_L^* = 2 \frac{K'}{K}$	$k = \frac{K_0}{\text{dn}\left[\frac{d}{A} K'_0, K'_0\right]}$ $k_0$ aus $\frac{K_0}{K'_0} = \frac{H}{A}$ $K'_0 = \sqrt{1 - K_0^2}$		[13]
	geschlitzte Platte	$F_L^* = \frac{K'}{K}$	$k$ wie Fall 10		

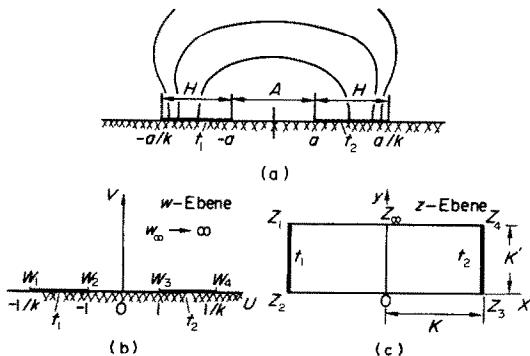


BILD 1. Transformation einer Bandanordnung in eine Plattenanordnung.

Die Punkte  $w_1$  bis  $w_4$  werden in die Eckpunkte  $z_1$  bis  $z_4$  des Rechteckes abgebildet.

Die Integration von Gl. (21) von  $u_1 = 0$  bis  $u_2 = 1$  (entsprechend der Strecke 0 bis  $w_3$ ) liefert das "vollständige elliptische Integral 1. Gattung", das als  $K(k) = K$  in Bild 2 oder in ausführlichen Tabellen [7, 8] angegeben ist. Der Wert von  $K$  entspricht der Streckenlänge 0 bis  $z_3$  des Rechteckes.

Integriert man Gl. (21) von  $u_1 = 1$  bis  $u_2 = 1/k$  (Strecke  $w_3$  bis  $w_4$ ), so erhält man das vollständige elliptische Integral 1. Gattung für den Komodul  $k'$ , das als  $K(k') = K'(K) = K'$  ebenfalls in Bild 2 wiedergegeben ist. Damit ergibt sich die Rechtecklänge  $z_3 z_4$  gleich dem Wert von  $K'$ . Zwischen dem Modul  $k$  und dem Komodul  $k'$  besteht der Zusammenhang

$$k^2 + k'^2 = 1. \tag{23}$$

Aus dem Rechteck  $z_1 z_2 z_3 z_4$  von Bild 1(c) mit dem Isothermenabstand  $A = z_2 z_3 = 2K$  und der Isothermenhöhe  $H = z_1 z_2 = z_3 z_4 = K'$  liest man nach

Gl. (19) den Formfaktor für zwei an einer wärmedichten Wand nebeneinanderliegende Bänder ab zu

$$F_L^* = K'/2K. \tag{24}$$

Der Formfaktor für zwei im unendlich ausgedehnten Medium nebeneinanderliegende Bänder (Fall 2, Tab. 1) läßt sich sofort als das Doppelte des Wertes von Gl. (24) angeben, denn die Bänder geben dabei nach beiden Seiten Wärme ab.

Die in Fall 2.2, Tab. 1 dargestellte Bandanordnung senkrecht unter einer isothermen Erdoberfläche kann aus Fall 2 hergeleitet werden: Zwischen den Bändern im Abstand  $A/2$  muß eine waagerechte Isotherme verlaufen. Wird sie als isotherme Erdoberfläche betrachtet, so halbieren sich die Längen sämtlicher Wärmestromlinien gegenüber dem Fall 2, wodurch der Formfaktor den doppelten Wert annimmt.

Die in Bild 1(b) getroffene Isothermenzuordnung kann so variiert werden, daß sich eine Isotherme von  $w_2$  bis  $w_3$  erstreckt, während die zwei anderen Isothermen gleicher Temperatur von  $w_4$  bis  $w_\infty$ , bzw.  $w_1$  bis  $-w_\infty$  (in unendliche Entfernung) verlaufen. Im Rechteck Bild 1(c) werden dann die Strecken  $z_1 z_2$  und  $z_3 z_4$  adiabate Grenzen darstellen. Damit ergibt sich die in Kapitel 3 besprochene Vertauschung von Isothermen und Adiabaten. Der Formfaktor im Fall 2.3, Tab. 1, nimmt den Reziprokwert des Faktors im Fall 2.1 an. Soweit die Formfaktoren nicht durch Überlegungen der vorgenannten Art gewonnen wurden, sind in den Tabellen Literaturhinweise angegeben.

6.1.1. *Bestimmung des Moduls k aus elliptischen Funktionen.* Für einige Anordnungen der Tabelle 1 läßt sich der Modul  $k$  nicht unmittelbar aus Größenverhältnissen bestimmen. Im Folgenden ist das Vorgehen für solche Fälle skizziert. Aus Gl. (21) ergibt sich mit  $w = \sin \psi$  die Legendresche Normalform des elliptischen Integrals 1. Gattung in der in Tabellen üblichen Schreibweise

$$\hat{F}(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \cdot \sin^2 \varphi)}} \tag{25}$$

wobei die obere Grenze, der Winkel  $\varphi$ , als Amplitude von  $\hat{F}$  bezeichnet wird.

Der Sinus dieser Amplitude wird "Sinus amplitudinis" genannt und mit  $sn$  abgekürzt.

$$\sin \varphi = sn(\hat{F}, k) \tag{26}$$

Es gelten die Beziehungen

$$sn^2(\hat{F}, k) + cn^2(\hat{F}, k) = 1 \tag{27}$$

(cn = Cosinus amplitudinis)

$$k^2 sn^2(\hat{F}, k) + dn^2(\hat{F}, k) = 1 \tag{28}$$

(dn = Delta amplitudinis)

Als Beispiel sei der Weg zur Bestimmung des Moduls

$$k = k_0/dn \left[ \frac{d}{A} K_0', k_0' \right] \tag{29}$$

der berippten Plattenanordnung, Fall 10, Tab. 1, skizziert. Der Index o kennzeichnet jeweils Hilfswerte für die Rechnung.

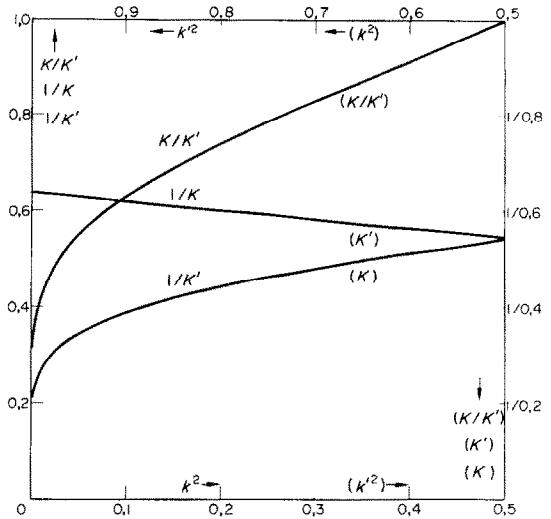


BILD 2. Vollständige elliptische Integrale 1. Gattung  $K$  und  $K'$  abhängig vom Modul  $k$  und  $k'$ . (Eingeklammerte Bezeichnungen für  $H/A > 1$ , rechts abzulesen.) [9]

Für gegebenes  $H/A = K_0/K_0'$  sind aus Bild 2 die Werte des vollständigen elliptischen Integrals 1. Gattung  $K_0$  und  $K_0'$  sowie die Moduln  $k_0$  und  $k_0'$  abzulesen.

(Für  $H/A > 1$  treffen die jeweils rechts angegebenen eingeklammerten Bezeichnungen zu.)

Mit  $(d/A)K_0' = \hat{F}(k, \varphi)$  erhält man nach Gl. (25) die Amplitude  $\varphi$  aus Tabellenwerken [7-10], wobei  $k_0' = \sin \varphi$  gesetzt ist.

Mit Gl. (26) und (28) folgt schließlich für Gl. (29)

$$k = \frac{k_0}{\sqrt{(1-k_0'^2 \sin^2 \varphi)}}. \tag{29a}$$

Dieser Modul  $k$  dient zur Bestimmung der vollständigen Integrale 1. Gattung  $K$  bzw.  $K'$  (nach Bild 2), womit sich schließlich der Wert des in Fall 10, Tab. 1, angegebenen Formfaktors

$$F_L^* = 2 \frac{K}{K'}$$

ermitteln läßt.

Für das schlecht ablesbare Gebiet des steilen Anstiegs der  $K/K'$ -Kurve gelten folgende Näherungsgleichungen [7]

$$K \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right) K' \approx \ln \frac{4}{k} + \left( \ln \frac{4}{k} - 1 \right) \frac{k^2}{4}. \tag{30}$$

In Fall 4, Tab. 1, ergibt sich [9] zur Bestimmung des Moduls die transzendente Gleichung

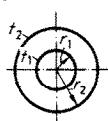
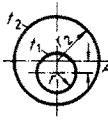
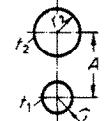
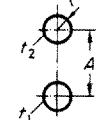
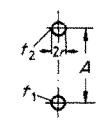
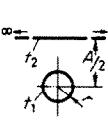
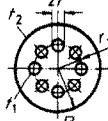
$$\frac{A}{H} = \frac{\pi}{2Kzn(u_1 k)} = \frac{\pi}{2KE(k, \psi) - 2E\hat{F}(k, \psi)} \tag{31}$$

mit  $\psi = \arcsin \left[ \frac{1}{k} \sqrt{1 - \frac{E(k')}{K(k)}} \right]$

wobei  $E$  das vollständige elliptische Integral 2. Gattung darstellt und  $zn$  die Jakobische Zetafunktion [9].

Für extreme Verhältnisse von Isothermenhöhe und -abstand sind Näherungsbeziehungen für den Formfaktor in Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 2. Zylind. Anordnungen, Rohre und Drähte

geometr. Form	Formfaktor	Bemerkungen	Formwiderstands - faktor	Lite - ratur
 <p>koaxiale Rohre</p>	$F_L^* = \frac{2\pi}{\ln(r_2/r_1)}$	aus Gl. (4)	$LR^* = \frac{1}{F_L^*} = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln(r_2/r_1)$	[12] [18]
 <p>exzentrische Rohre</p>	$F_L^* = \frac{2\pi}{\operatorname{arcosh}(\frac{m_1}{r_1}) \cdot \operatorname{arcosh}(\frac{m_2}{r_2})}$ $\operatorname{arcosh}(\frac{m}{r}) = \ln(\frac{m}{r} + \sqrt{(\frac{m}{r})^2 - 1})$	$m_1 = \frac{A}{2} [1 + (\frac{r_1}{A})^2 - (\frac{r_2}{A})^2]$ $m_2 = \frac{A}{2} [1 - (\frac{r_1}{A})^2 + (\frac{r_2}{A})^2]$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} [\operatorname{arcosh}(\frac{m_1}{r_1}) - \operatorname{arcosh}(\frac{m_2}{r_2})]$	[11] [12] [14]
 <p>zwei Rohre im ausgedehnten Medium</p>	$F_L^* = \frac{2\pi}{\operatorname{arcosh}(\frac{m_1}{r_1}) + \operatorname{arcosh}(\frac{m_2}{r_2})}$	$m_1 = \frac{A}{2} [1 + (\frac{r_1}{A})^2 - (\frac{r_2}{A})^2]$ $m_2 = \frac{A}{2} [1 - (\frac{r_1}{A})^2 + (\frac{r_2}{A})^2]$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} [\operatorname{arcosh}(\frac{m_1}{r_1}) + \operatorname{arcosh}(\frac{m_2}{r_2})]$	[11] [14]
 <p>zwei Rohre von gleichem Radius</p>	$F_L^* = \frac{2\pi}{2 \operatorname{arcosh}(A/2r)}$		$LR^* = \frac{1}{2\pi} [2 \operatorname{arcosh}(A/2r)]$ $= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \left\{ \ln \left( \frac{A}{2r} + \sqrt{\left(\frac{A}{2r}\right)^2 - 1} \right) \right\}$	[15] [19]
 <p>zwei Drähte</p>	$F_L^* = \frac{2\pi}{2 \cdot \ln(A/r)}$	für $A/r > 10$ Abweichung $< 1\%$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \ln(A/r)$	[11] [12]
 <p>Rohr im Erdboden</p>	$F_L^* = \frac{2\pi}{\operatorname{arcosh}(A/2r)}$		$LR^* = \frac{1}{2\pi} [\operatorname{arcosh} A/2r]$ $= \frac{L}{2} R^* \text{ (Fall 3.1)}$	[11] [14] [19] [20]
 <p>n Drähte auf einem Teilkreis konzentrisch zum Hüllrohr</p>	$F_L^* = \frac{2\pi}{\ln(R/r) - \frac{1}{n} \ln(nr/r_1)}$	für $r \ll r_1$ $n \gg 1$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} [\ln R/r_1 - \frac{1}{n} \ln(nr/r_1)]$ $= L R^*_{(\text{Fall 1})} - R^* \cdot L$ $LR^* \approx \frac{1}{2\pi n} \ln(nr/r_1)$	[12]

fortgesetzt s. 758

6.2. Zylindrische Anordnungen (Tabelle 2)

Wie für die ebene planparallele Platte läßt sich auch für die koaxiale Anordnung kreiszylindrischer Rohre der Formfaktor direkt aus Gl. (4) errechnen.

Neben der in Abschnitt 6.1 angegebenen Möglichkeit der analytischen Bestimmung des Formfaktors mit Hilfe der konformen Abbildung sollen hier zwei weitere Verfahren skizziert werden.

Da die Laplace-Gleichung im Potentialterm linear ist, kann man die Potentialverteilung durch Überlagerung der Einzelpotentiale erhalten. Für zwei nach Bild 3 im Abstand A voneinander entfernte Rohre unterschiedlicher Temperatur gilt:

Aus dem Zusammenwirken der Zylinderquelle Q und der dem Betrag nach gleich großen Zylindersenke

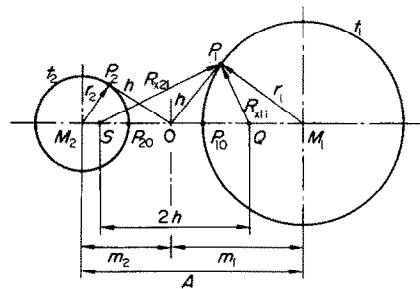


BILD 3. Anordnung zweier Kreisrohre mit isothermen Mantelflächen.

S mit den Ergiebigkeiten

$$\phi_Q = -\phi_S = \phi/L = \phi_L$$

Fortsetzung Tabelle 2

	konfokale Ellipsenrohre	$F_L^* = \frac{2\pi}{\ln \left( \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} \right)}$	Voraussetzung $c_1 = c_2 = c$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}$	[11] [15] [19]
	Band in konfokalem Ellipsenrohr	$F_L^* = \frac{2\pi}{\ln \left( \frac{a+b}{c} \right)}$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{a+b}{c} \right)$	[11] [15] [19]
	Draht außermittig in ebenem Plattenstück	$F_L^* = \frac{2\pi}{\ln \left( \frac{\Im_2(A/2D)}{\Im_1(0)} + \ln \left( \frac{4D}{r} \right) \right)}$	$\Im(x)$ Thetafunktion mit Parameter $\tau = i \frac{H}{2D}$ für $r \ll D, H$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{\Im_2(A/2D)}{\Im_1(0)} + \ln \left( \frac{4D}{r} \right) \right]$	[9] [11]
	Draht in unendlicher Platte	$F_L^* = \frac{2\pi}{\ln \cot \frac{\pi D A}{4D} + \ln \frac{4D}{\pi r}}$	$r \ll D$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \cot \frac{\pi(2A)}{4D} + \ln \left( \frac{4D}{\pi r} \right) \right]$	[22a]
		$F_L^* = \frac{2\pi}{\ln \frac{4D}{\pi r}}$	$A = 0$ $r \ll D$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4D}{\pi r}$	[16]
	Draht in ebenem Plattenstück	$F_L^* = \frac{2\pi}{\ln \left( \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{k'} + \ln \left( \frac{2D}{r} \right) \right)}$ oder $F_L^* = \frac{2\pi}{\frac{\pi D}{2H} + \ln \frac{2H}{2\pi r}}$	$k$ aus $\frac{K}{K'} = \frac{2D}{H}$ $k' = \sqrt{1-k^2}$ $r \ll D, H$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{k'} \right) + \ln \left( \frac{2D}{r} \right) \right]$ oder $LR^* = P_1^* + Z^*$ $P_1^* = \frac{D}{4H}, Z^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2H}{2\pi r}$	[9] [15] [12]
	Loch in ebenem Plattenstück	$F_L^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi D}{2H} + \ln \frac{2H}{2\pi r} \right]$	$r \ll D, H$	$LR^* = -\frac{1}{P_1^* + Z^*}$	
	Drähte unterschiedlicher Temperatur in unendlicher Platte	$F_L^* = \frac{2\pi}{\frac{2\pi A}{2H} + \ln \frac{2H}{2\pi r}}$	$r \ll A, D$	$LR^* = P_1^* + Z^*$ $P_2^* = \frac{A}{2H}$	[12] [15]

fortgesetzt s. 759

ergeben sich an den Stellen  $P_1$  und  $P_2$  die Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  zu

$$t_1 = \frac{\phi_L}{\lambda} \cdot \frac{\ln R_{x21}/R_{x11}}{2\pi} \text{ bzw. } t_2 = -\frac{\phi_L}{\lambda} \cdot \frac{\ln R_{x22}/R_{x12}}{2\pi} \quad (32)$$

Die in der Regel gegebenen geometrischen Größen—Rohrhalbmesser  $r_1, r_2$  und Achsenabstand  $A$ —lassen sich in den Mittelpunktabständen  $m$  zusammenfassen:

$$\begin{aligned} m_1 &= A \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{A} \right)^2 - \left( \frac{r_2}{A} \right)^2 \right] / 2 \\ m_2 &= A \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{A} \right)^2 + \left( \frac{r_2}{A} \right)^2 \right] / 2 \end{aligned} \quad (33)$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhanges zwischen logarithmischer Funktion und Areefunktion ergibt sich für die Rohroberflächentemperaturen

$$t_1 = \frac{\phi_L}{\lambda} \frac{\operatorname{arcosh} m_1/r_1}{2\pi}; t_2 = -\frac{\phi_L}{\lambda} \frac{\operatorname{arcosh} m_2/r_2}{2\pi} \quad (34)$$

Der auf die Längeneinheit bezogene Formfaktor folgt unmittelbar aus Gl. (34)

$$\frac{\phi_L}{\lambda} \frac{1}{(t_1 - t_2)} = F_L^* = \frac{2\pi}{\operatorname{arcosh}(m_1/r_1) + \operatorname{arcosh}(m_2/r_2)} \quad (35)$$

Als Spezialfall dieses Formfaktors läßt sich mit  $r_1 = r_2 = r$  der Fall 3.1, Tab. 2, herleiten. Mit der Annahme  $A/r \gg 1$  erhält man die Näherung Fall 3.2.

Der Formfaktor eines im Erdreich verlegten Rohres, Fall 3.3, Tab. 2, ergibt sich aus dem Fall 3.1 mit der Überlegung, daß bei halbiertem Stromlinienlänge der Formfaktor doppelte Größe erreichen muß, da die übertragene Wärmemenge verdoppelt wird.

Die besprochenen Fälle lassen sich auch mit Hilfe der konformen Abbildung lösen [14]; der Fall 3.3 auch nach dem Prinzip der fiktiven Quellen und Senken.

Fortsetzung Tabelle 2

	Draht in halbbundlicher Platte	$F_{L^*} = \frac{2\pi}{\frac{\pi A}{2H} + \ln \frac{2H}{2\pi r}}$		$LR^* = \frac{1}{2} P_2^* + Z^*$	[12] [15] [19]																				
	Draht in Platte	$F_{L^*} = \frac{2\pi}{\ln \frac{\operatorname{sn}(kA/2D)}{kA/2D \operatorname{cn}(kA/2D)}} \cdot \frac{1}{dn(kA/2D) + \ln A/r}$	$r \ll H, (D - A/2)$ $\frac{K}{K'} = \frac{H}{D}$	$LR^* = P_3^* + Z_3^*$	[22a]																				
	Drähte abwechselnd von unterschiedlicher Temperatur	$F_{L^*} = \frac{2\pi}{\ln \frac{4D}{\pi r}}$	$r \ll D$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4D}{\pi r}$	[12] [15]																				
	Draht außermittig in Rechteckprisma	$F_{L^*} = \frac{2\pi}{\ln \frac{\operatorname{Im} \operatorname{sn}(2kz_1/2D)}{\operatorname{cn}(2kz_1/2D) \operatorname{dn}(2kz_1/2D)}} + \ln \frac{2D}{K \cdot r}$	$r \ll D$ $z_1 = x_1 + iy_1$ $k \text{ aus } \frac{2K}{K'} = \frac{D}{H}$	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ \ln \frac{\operatorname{Im} \operatorname{sn}(2kz_1/2D)}{\operatorname{cn}(2kz_1/2D) \operatorname{dn}(2kz_1/2D)} + \ln \frac{2D}{K \cdot r} \right]$	[9]																				
	Draht in der Achse eines Rechteckprisma	$F_{L^*} = \frac{2\pi}{\ln \left( \frac{4D}{\pi r} \right) - C}$	$C = C(H/D)$ <table border="1" data-bbox="739 876 860 1018"> <thead> <tr> <th>H/D</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1,00</td><td>0,1658</td></tr> <tr><td>1,25</td><td>0,0793</td></tr> <tr><td>1,50</td><td>0,0356</td></tr> <tr><td>2,00</td><td>0,0075</td></tr> <tr><td>2,50</td><td>0,0016</td></tr> <tr><td>3,00</td><td>0,0003</td></tr> <tr><td>4,00</td><td>1,4 · 10<sup>-5</sup></td></tr> <tr><td>∞</td><td>0</td></tr> </tbody> </table> $r \leq 0,1D$	H/D	C	1,00	0,1658	1,25	0,0793	1,50	0,0356	2,00	0,0075	2,50	0,0016	3,00	0,0003	4,00	1,4 · 10 <sup>-5</sup>	∞	0	$LR^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{4D}{\pi r} - C \right]$	[9], [11] [16], [17] [21]		
H/D	C																								
1,00	0,1658																								
1,25	0,0793																								
1,50	0,0356																								
2,00	0,0075																								
2,50	0,0016																								
3,00	0,0003																								
4,00	1,4 · 10 <sup>-5</sup>																								
∞	0																								
	Draht im Mittelpunkt eines gleichseitigen Polygons	$F_{L^*} = \frac{2\pi}{\ln(H/r) - C_1}$	$C_1 = C_1(n)$ $n$ Anzahl der Ecken <table border="1" data-bbox="739 1048 860 1199"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>C<sub>1</sub></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>3</td><td>0,5696</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,2708</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,1506</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,1067</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,0761</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,0570</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,0442</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,0354</td></tr> <tr><td>∞</td><td>0</td></tr> </tbody> </table> $r \leq 0,1R$ für $n=3$ $r < R$ für $n = \infty$	n	C <sub>1</sub>	3	0,5696	4	0,2708	5	0,1506	6	0,1067	7	0,0761	8	0,0570	9	0,0442	10	0,0354	∞	0		[9], [11] [16], [17] [21]
n	C <sub>1</sub>																								
3	0,5696																								
4	0,2708																								
5	0,1506																								
6	0,1067																								
7	0,0761																								
8	0,0570																								
9	0,0442																								
10	0,0354																								
∞	0																								
	Konzentrische Quadrate	$F_{L^*} = \frac{2\pi}{0,93 \ln(H/D) - 0,0502}$ $F_{L^*} = \frac{2\pi}{0,785 \ln(H/D)}$	$H/D > 1,4$ $H/D < 1,4$		[17]																				

Eine Aufteilung des Innenrohres, Fall 4, Tab. 2, in Einzelröhrchen führt zu einer Vergrößerung des Formfaktors gegenüber dem mit koaxialem Innenrohr.

Als zweites analytisches Verfahren soll die Ermittlung des Formfaktors von Rohren elliptischen Querschnittes anhand der Darstellungsmöglichkeit durch komplexe Potentiale beschrieben werden: In analytischen, komplexen Funktionen erfüllt sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil die Laplace-Gleichung und stellt damit eine Lösung der Potentialgleichung dar. Die den Real- und Imaginärteil repräsentierenden Kurven sind orthogonal und können als Stromlinien und Isothermen aufgefaßt werden.

Von der komplexen Funktion mit der Hilfsgröße  $s$

$$z = c \sin i \frac{w}{s} = x + iy \quad (36)$$

ausgehend, erhält man mit  $w = u + iv$  bei Berücksichtigung des Zusammenhanges von trigonometrischen und Hyperbelfunktionen

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 u/s} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 u/s} = 1 \quad (37)$$

Gl. (37) liefert für  $u = \text{const.}$  Ellipsen mit den Halbachsen

$$a = c \cosh u/s; \quad b = c \sinh u/s \quad (38)$$

und dem halben Brennpunktabstand

$$c = \sqrt{(a^2 - b^2)}. \quad (39)$$

Mit der Temperaturzuordnung  $u = t$  erhält man die Temperaturen  $t_1$  der Ellipse 1 mit den Halbachsen  $a_1$ ,

$b_1$  und  $t_2$  der konfokalen ( $c = \text{const.}$ ) Ellipse 2 aus Gl. (38)

$$t_1 = s \operatorname{arsinh} \frac{b_1}{\sqrt{(a_1^2 - b_1^2)}}; t_2 = s \operatorname{arsinh} \frac{b_2}{\sqrt{(a_2^2 - b_2^2)}}. \quad (40)$$

Damit und aus der Überlegung, daß für  $a = b$  der Fall konzentrischer Kreisrohre auftritt, wofür  $\phi_L = 2\pi\lambda s$ , ergibt sich der Formfaktor Fall 5, Tab. 2, zu

$$\frac{\phi_L}{\lambda} \frac{1}{(t_1 - t_2)} = F_L^* = \frac{2\pi}{\ln [(a_2 + b_2)/(a_1 + b_1)]}. \quad (41)$$

Für  $b_1 = 0$  ergibt sich unmittelbar der Spezialfall 5.1, Tab. 2, eines Bandes der Breite  $2c = 2a_1$  in einer konfokalen Ellipse.

Eine besondere Familie von Anordnungen stellen isotherme Zylinder bzw. Drähte zwischen isothermen oder adiabaten Platten dar. Auf Grund von Symmetriebetrachtungen können sie als Grundbestandteil beliebig vieler nebeneinander angeordneter Zylinder bzw. Drähte angesehen werden. (Fall 6, Tab. 2).

Da der Halbmesser der Zylinder gegenüber anderen geometrischen Größen stets klein sein soll, ist die Vorstellung von Drähten als anschaulich gewählt. Solche Anordnungen werden von sogenannten meromorphen periodischen Funktionen von der Art

$$w = -C \ln \sin \frac{\pi z}{2H} \quad (42)$$

wiedergegeben. Sie sind in periodischen Intervallen, die jeweils mit den Drahtmittelpunkten zusammenfallen, nicht analytisch. In unmittelbarer Nähe des Drahtes geben die Funktionen den Feldlinienverlauf wie um Zylinderquellen wieder; in großer Entfernung vom Draht wird der Verlauf wie bei einem ebenen Parallelfeld dargestellt. Damit wird die Isotherme der Drahtoberfläche, z. B. Fall 6.2, Tab. 2, von der Art der Zylinderisothermen  $t_2 \sim \ln l_1/l_2$  sein, ( $l_1, l_2$  bedeuten zwei charakteristische Längen), während die Isothermen der Plattenoberfläche mit  $t_p \sim l_3/l_4$  durch das einfache Verhältnis charakteristischer Längen wiedergegeben werden. Somit erhält man Formfaktoren von der Art

$$F_L^* = 2\pi/(\pi D/2H + \ln 2H/2\pi r) \quad (43)$$

welche getrennt eine Platten- und Zylindercharakteristik erkennen lassen. Im Formwiderstand ist dies durch Aufteilung in einen Plattenformwiderstand  $P^*$  und einen Zylinderformwiderstand  $Z^*$  verdeutlicht, Fall 6.2; 6.3; 7; 7.1; 8, Tab. 2. Den Fällen 6 bis 10, Tab. 2, liegen Funktionen wie Gl. (42) zugrunde. Die unterschiedliche Darstellung des Formfaktors ergibt sich als Folge unterschiedlicher Lösungsmethoden, entweder durch Rationalmachen der jeweiligen Potenzfunktion [15] oder mit Hilfe von Thetafunktionen [9]. Werte für die Thetafunktionen können Tabellen [7] entnommen oder aus den Definitionsbeziehungen [9, 10] errechnet werden:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(u, \tau) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^{n^2} \cos(2\pi n u) \\ \vartheta_1(u, \tau) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin(2n+1)\pi u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2(u, \tau) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)\pi u \\ \vartheta_3(u, \tau) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2\pi n u). \end{aligned} \quad (44)$$

Dabei ist  $q = e^{i\tau}$ . Der Vergleich mit Fall 6, Tab. 2, zeigt:  $\tau$  ist als rein imaginär vorgegeben, so daß der Parameter  $q$  reell, positiv und stets kleiner als eins wird.

Es ist für die Gleichungen (44) zu beachten, daß für  $\vartheta_0(u, \tau)$  und  $\vartheta_3(u, \tau)$  die untere Grenze  $n = 1$  ist. Außerdem gilt folgender Zusammenhang für den Fall, Variable  $u = 0$  mit vorgegebenem  $\tau$

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta_1'(0, \tau) = \pi \vartheta_2(0, \tau) \vartheta_3(0, \tau) \vartheta_0(0, \tau) \quad (45)$$

Dabei bedeutet  $\vartheta_1'(0)$  den Wert Ableitung der Thetafunktion nach  $u$  an der Stelle  $u = 0$ .

Die Formfaktoren der Anordnungen Fall 10.1 und 11, Tab. 2, für einen beheizten Draht in einem Rechteckprisma bzw. in einem  $n$ -seitigen Polygon lassen sich [16] aus der Funktion

$$w = 2 \ln z + \sum_{j=0}^{\infty} A_{jn} (r_a/r_i)^{jn} e^{ij n \theta} \quad (46)$$

erhalten, mit  $n$  als der Zahl der Polygonseiten und  $\theta$  als dem Unlaufwinkel.

Entlang der äußeren Berandung folgt das Temperaturfeld praktisch ausschließlich dem Reihenterm; in unmittelbarer Umgebung des Drahtes folgt es dem logarithmischen Term der Gl. (46). Zur Berechnung des Formfaktors genügt die Berücksichtigung des ersten Koeffizienten  $A_0$  der Reihe.

Der auf unterschiedliche Weise ermittelte Formfaktor des Falles 10.1, Tab. 2, für  $H/D = 1$  unterscheidet sich in den verschiedenen Literaturquellen nur in der Schreibweise. Es besteht Übereinstimmung mit dem für Fall 11, Tab. 2, für  $n = 4$  angegebenen Wert. Für den Extremwert  $H/D \rightarrow \infty$  stimmen die Formfaktoren Fall 10.1 und 6.1, Tab. 2, ebenfalls überein. Die Formfaktoren für Rohranordnungen in Form konzentrischer Quadrate, Fall 12, Tab. 2, wurden experimentell an elektrisch leitendem Papier ermittelt [17].

## 7. KUGELQUELLEN

### 7.1. Einzelkörper im unendlich ausgedehnten Medium (Tabelle 3)

Der einfache, durch Gl. (4) streng lösbare Fall trifft hier für Kugelschalen zu. Der von einer Kugelquelle ausgehende Wärmestrom pflanzt sich radial nach allen Richtungen fort. Die Isothermen stellen konzentrische Kugelschalen dar, und der Formkoeffizient wird

$$F^* = 4\pi/(1/r_1 - 1/r_2). \quad (47)$$

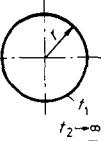
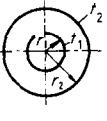
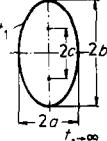
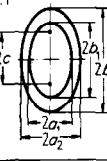
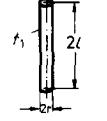
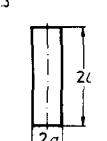
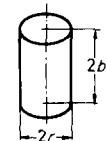
Eine Kugelschale mit unendlich großem Radius kann ebenfalls als Wärmesenke angesehen werden. Damit ergibt sich für eine Einzelkugel im unendlich ausgedehnten Medium der Formkoeffizient

$$F^* = 4\pi r. \quad (48)$$

Bezieht man den Formkoeffizient  $F^*$  auf den Radius der Wärmequelle  $r$ , so ergibt sich der Formfaktor für die Einzelkugel

$$F_r^* = 4\pi. \quad (48a)$$

Tabelle 3. Einzelne Körper im unendlich ausgedehnten Medium

geometr. Form	Formfaktor	Bemerkungen	Formwiderstands-faktor	Lite-ratur																												
 <p>Einzelkugel</p>	$F_r^* = 4\pi r$ (Formkoeffizient) $F_r = 4\pi$	bezogen auf den Kugelradius	$\frac{1}{F_r^*} = R^* = \frac{1}{4\pi r} = R_K^*$ $\frac{1}{F_r} = r R^* = \frac{1}{4\pi}$	[18] [25]																												
 <p>konzentrische Kugeln</p>	$F_{r_1}^* = 4\pi / (r_2/r_1 - 1)$	bezogen auf den größeren Kugelradius	$r_2 R^* = \frac{1}{4\pi} (r_2/r_1 - 1)$	[18]																												
 <p>gestrecktes Ellipsoid</p>	$F_b^* = \frac{4\pi \sqrt{1 - a^2/b^2}}{\operatorname{artanh} \sqrt{1 - a^2/b^2}}$	bezogen auf die große Halbachse  bezogen auf den halben Brennpunktstand	$b R^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\operatorname{artanh}(1 - a^2/b^2)}{\sqrt{1 - a^2/b^2}} \right]$ $c R^* = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{artanh} c/b]$	[15]																												
 <p>konfokale gestreckte Ellipsoide</p>	$F_c^* = 4\pi \frac{1}{\operatorname{artanh} c/b_1 - \operatorname{artanh} c/b_2}$	$c = \sqrt{b_1^2 - a_1^2}$ $= \sqrt{b_2^2 - a_2^2}$ bezogen auf den gemeinsamen, halben Brennpunktstand	$c R^* = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{artanh} c/b_1 - \operatorname{artanh} c/b_2]$	[18]																												
 <p>Drahtstück</p>	$F_l^* = \frac{4\pi}{\ln \frac{2l}{r}}$	$\frac{r}{l} \leq 0,1$ bezogen auf die halbe Drahtlänge	$\mathcal{L} R^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{2l}{r} \right]$ $= \mathcal{L} R_z^*$	[12] [15] [25]																												
 <p>Bandstück der Breite 2a</p>	$F_l^* = \frac{4\pi}{\ln \frac{4l}{a}}$ aus 2.2 mit $r = a/2$	$\frac{a}{2l} \leq 0,1$	$\mathcal{L} R^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \ln \frac{4l}{a} \right]$	[25]																												
 <p>Zylinderstumpf</p>	$F_r^* = f(b/r)$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <thead> <tr> <th>b/r</th> <th>F_r^*</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>0,25</td><td>10,42</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>12,11</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>14,97</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>19,87</td></tr> <tr><td>4,0</td><td>27,84</td></tr> </tbody> </table> — Kreisscheibe	b/r	F_r^*	0	8	0,25	10,42	0,5	12,11	1,0	14,97	2,0	19,87	4,0	27,84		<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <thead> <tr> <th>b/r</th> <th>4πrR^*</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>157</td></tr> <tr><td>0,25</td><td>119</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>104,5</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>88,8</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>66,6</td></tr> <tr><td>4,0</td><td>45,2</td></tr> </tbody> </table>	b/r	4πrR^*	0	157	0,25	119	0,5	104,5	1,0	88,8	2,0	66,6	4,0	45,2	[11]
b/r	F_r^*																															
0	8																															
0,25	10,42																															
0,5	12,11																															
1,0	14,97																															
2,0	19,87																															
4,0	27,84																															
b/r	4πrR^*																															
0	157																															
0,25	119																															
0,5	104,5																															
1,0	88,8																															
2,0	66,6																															
4,0	45,2																															

fortgesetzt s. 762

In Tabelle 3 ist der Formfaktor jeweils auf die größte Körperabmessung bezogen, außer im Fall konfokaler Ellipsen, wo der gemeinsame halbe Brennpunktstand  $c$  als charakteristisch angesehen wurde. Die Bezugsgröße ist wieder als Index angegeben. Zur Unterscheidung der Formwiderstandsfaktoren von Einzelkugel, -zylinder (Drahtstück), -scheibe und Einzelkreisring sind noch die Indices  $K, Z, S$  und  $R$  eingeführt. Im Folgenden sind Formkoeffizienten angegeben, um zu zeigen, daß die Bezugsgrößen in Tabellen 3 und 4 austauschbar sind.

Reiht man eine Anzahl von Kugelquellen nebeneinander, so ergibt sich eine kurze Zylinderquelle mit umgebenden Isothermen in Form von Ellipsoiden. Für ein gestrecktes Ellipsoid erhält man die Temperatur

seiner isothermen Oberfläche aus

$$t = \frac{1}{4\pi\lambda} \int_{2c} \frac{\phi \, ds}{2c \, r} \tag{49}$$

wobei  $2c$  die Länge der Zylinderquelle (gleich Brennpunktstand) darstellt,  $ds$  ein Element der Zylinderquelle und  $r$  den Abstand von diesem Element zur Oberfläche des Ellipsoids wiedergibt.

Für konstante Wärmestromdichte und mit den Ellipsoidabmessungen  $b$  für die große Halbachse und  $a$  für die kleine und mit  $c = \sqrt{(b^2 - a^2)}$  ergibt sich die Oberflächentemperatur zu

$$t = \frac{\phi}{\lambda} \frac{1}{4\pi 2c} \ln \frac{b + \sqrt{(b^2 - a^2)}}{b - \sqrt{(b^2 - a^2)}} \tag{50}$$

Fortsetzung Tabelle 3

	gedrücktes Ellipsoid	$F_o^* = \frac{4\pi \sqrt{(1 - b^2/a^2)}}{\arctan \frac{a}{b} \sqrt{(1 - b^2/a^2)}}$	bezogen auf die größere Halbachse bezogen auf den halben Brennpunktstabsand $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$aR^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \arctan \frac{a}{b} \sqrt{(1 - b^2/a^2)} \right]$ $cR^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \arctan \frac{c}{b} \right]$	[15]
	dünne Kreisscheibe	$F_r^* = \frac{4\pi}{\pi/2} = 8$	$b \rightarrow 0$	$rR^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\pi}{2} = rR_s^*$	[12] [15]
	Kreiring (Draht)	$F_r^* = \frac{4\pi \cdot \pi}{\ln 8r/\rho}$	$r/\rho > 20$	$rR^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2 \ln 8r/\rho}{2\pi} \right] = rR_p^*$	[12] [15] [24] [25] [26]
	Flachring der Breite 2a	$F_r^* = \frac{4\pi \cdot \pi}{\ln 16r/a}$ aus 4 mit $\rho = a/2$	$r/a > 10$	$rR^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2 \ln 16r/a}{2\pi} \right]$	

Daraus erhält man den Formkoeffizienten des Ellipsoids gegen die unendlich weit entfernte isotherme Umhüllung zu

$$\frac{\phi}{\lambda t} = F^* = 4\pi b \frac{\sqrt{(1 - a^2/b^2)}}{\operatorname{artanh} \sqrt{(1 - a^2/b^2)}} \quad (51)$$

Für konfokale gestreckte Ellipsoide lassen sich die jeweiligen Oberflächentemperaturen nach Gl. (50) bestimmen, und aus der Temperaturdifferenz wird der Formfaktor, Fall 2.1, Tab. 3, erhalten. Er ergibt sich auch als Differenz der Formwiderstandsfaktoren beider Ellipsoide.

Für sehr kleine Achsenverhältnisse,  $a/b < 0,1$ , kann das gestreckte Ellipsoid als drahtähnlicher Zylinder oder weiter als Band angenähert werden. Der Nenner im Formfaktor läßt sich in einer Reihenentwicklung auf die in Fall 2.2, Tab. 3, angegebenen Werte vereinfachen. Die einem Drahtstück vom Durchmesser  $2r$  gleichwertige Abmessung für ein Bandstück der Breite  $2a$  ergibt sich aus der Anordnung 5.1, Tab. 2, für eine sehr große Hüllellipse mit  $a \approx b$ . Der Vergleich der zylindrischen Anordnungen 1 und 5.1, Tab. 2, liefert  $r_1 = c/2$  und angenähert für Einzelkörper großer Länge ( $l > 5a$ ) erhält man für die Umrechnung von Bandbreite in Drahradius  $r = a/2$ . Dieser Wert eingesetzt in Fall 2.2, Tab. 3, liefert Fall 2.3.

Der Formkoeffizient für ein gedrücktes Ellipsoid im unendlich ausgedehnten Medium errechnet sich mit Hilfe krummliniger Orthogonalkoordinaten [23] zu

$$F^* = 4\pi a \frac{\sqrt{(1 - b^2/a^2)}}{\arctan \frac{a}{b} \sqrt{(1 - b^2/a^2)}} \quad (52)$$

Der Formkoeffizient konfokaler gedrückter Ellipsoide kann wie für gestreckte Ellipsoide (Fall 2.1, Tab. 3) aus der Differenz der Formwiderstände erhalten werden zu

$$F^* = \frac{1}{R^*} = \frac{4\pi c}{\arctan c/b_1 - \arctan c/b_2} \quad (52a)$$

Für den Fall  $b \rightarrow 0$  schrumpft das gedrückte Ellipsoid zu einer dünnen Kreisscheibe zusammen, und mit  $a/b \rightarrow \infty$  erhält man aus Gl. (52) für den Formkoeffizienten der Scheibe gegen den unendlichen Raum, Fall 3.1, Tab. 3,

$$F^* = 4\pi r/(\pi/2) = 8r. \quad (53)$$

Zur Bestimmung des Formkoeffizienten von kreisringförmig gebogenen Drähten geht man ebenfalls von den zu einer Zylinderquelle aneinandergereihten Kugelquellen aus. Mit Hilfe des elliptischen Integrals 1. Gattung und einer Näherung für große Kreisdurchmesser gegenüber kleinen Drahtdurchmessern, um den Modul  $k$  auszudrücken, ergibt sich

$$F^* = 4\pi 2\pi r/(2 \ln 8r/\rho). \quad (54)$$

Betrachtet man den Kreisring als ein kreisförmig gebogenes Drahtstück der Länge  $2l = 2\pi r$ , so gibt der Vergleich gegenüber Fall 2.2, Tab. 3, einen etwas kleineren Formfaktor wegen der fehlenden Wärmeabgabe an den beiden Drahtenden. Für flache Kreisringe der Breite  $2a$  läßt sich mit  $\rho = a/2$  aus Gl. (54) der entsprechende Formfaktor Fall 4.1, Tab. 3, ermitteln.

7.2. Einzelkörper im halbbunendlich ausgedehnten

Medium

Für alle in Tabelle 3 angeführten Einzelkörper, die Wärme über den vollen Raumwinkel gegen eine im Unendlichen liegende Hüllkugelschale abgeben, gilt nach Symmetriebetrachtung, daß bei einer Halbierung des Körpers durch eine senkrechte oder waagerechte Ebene auch die Wärmeabgabe und damit der Formkoeffizient und der Formfaktor halbiert wird. Der Formwiderstand als Kehrwert des Formkoeffizienten, wird verdoppelt.

$$F_{\frac{1}{2}\infty}^* = \frac{1}{2}F^* \text{ bzw. } R_{\frac{1}{2}\infty}^* = 2R^* \quad (55)$$

Aus Tabelle 3 und Gl. (55) läßt sich somit der Formfaktor für Anordnungen bestimmen, wie sie in Bild 4 gezeigt sind.

Es ist dabei zu beachten, daß die Halbierungsebene eine Adiabate darstellen muß und die Wärmeabgabe vom Halbkörper zu einer unendlich weit entfernten Halbkugelschale hin erfolgt.

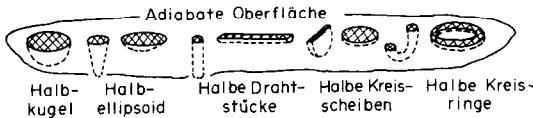


BILD 4. Halbkörper im halbbunendlich ausgedehnten Medium mit adiabater Oberfläche.

7.3. Zwei gleiche Körper im ausgedehnten Medium

(Tabelle 4)

Für zwei in großem Abstand voneinander liegende Kugelquellen entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit können Isothermen in Kugelform angenommen werden. Die Temperatur an einer beliebigen Stelle des Raumes ergibt sich aus

$$t = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{\phi_1}{r_1} + \frac{\phi_2}{r_2} \right) \quad (56)$$

mit  $\phi_1, \phi_2$  als den Quellenergiebigkeiten und  $r_1, r_2$  als den Abständen von den Quellen zum Aufpunkt.

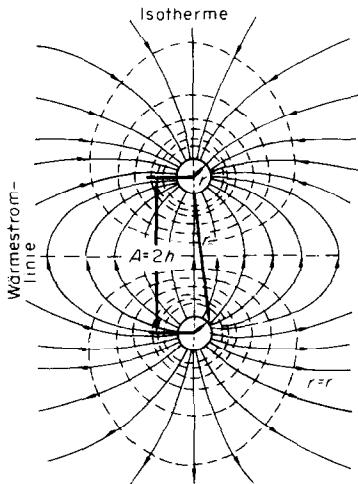


BILD 5. Anordnung zweier Kugeln im ausgedehnten Medium.

Für die Anordnung nach Bild 5 gilt zur Bestimmung der jeweiligen Oberflächentemperatur von Kugel 1 und 2 mit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\phi_2 = \phi \\ r_1 &= r; r_2 \approx A \quad t_1 = \frac{\phi}{\lambda} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{A} \right) \\ r_1 \approx A; r_2 &= r \quad t_2 = \frac{\phi}{\lambda} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Der Formkoeffizient Fall 1, Tab. 4, folgt daraus zu

$$\frac{\phi}{\lambda(t_1 - t_2)} = F^* = \frac{4\pi}{2(1/r - 1/A)}. \quad (58)$$

Bei kleinen Quellenabständen verformen sich die Isothermen derart, daß eine Abflachung im Gebiet der einander zugewandten Seiten erfolgt und eine Zuspitzung im abgewandten Teil. Auf eine vorgeschriebene Kugelform können die Isothermen durch Einführung von Scheinquellen und -senken gebracht werden.

Jede neu eingeführte Scheinquelle bewirkt aber nicht nur die gewünschte Anpassung an die Kugelform der einen Isotherme, sondern führt auch zu einer Störung auf der Gegenisotherme und muß durch eine neu einzuführende Scheinsenke kompensiert werden. Das führt zu zwei "Puppe in der Puppe"-Systemen. Der Formkoeffizient ergibt sich durch Überlagerung der Systeme in Form einer Reihe, Fall 1.1, Tab. 4,

$$F^* = 4\pi \frac{r}{2} \left[ 1 + \frac{r}{A} + \left( \frac{r}{A} \right)^2 + \left( \frac{r}{A} \right)^3 + 2 \left( \frac{r}{A} \right)^4 + 3 \left( \frac{r}{A} \right)^5 \dots \right]. \quad (59)$$

Die gegenseitige Beeinflussung ist bei den zu Drahtstücken und Kreisscheiben entarteten elliptischen Körpern noch am geringsten. Auch in diesen Fällen (2; 2.1; 3; 4; Tab. 4) wurden die Formfaktoren aus der Überlagerung der Teilwärmeströme bestimmt.

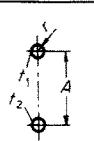
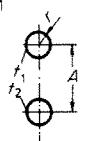
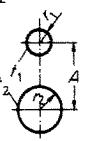
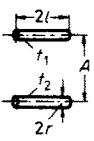
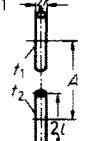
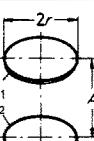
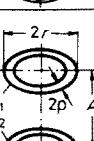
Für einander gegenüberliegende kurze Bandstücke der Breite  $2a$  läßt sich der Formfaktor aus Fall 2 bzw. 2.1, Tab. 4, ableiten, wenn  $r = a/2$  (vgl. Kap. 7.1) gesetzt wird. Betrachtet man die in Tabelle 4 aufgeführten Formwiderstandsfaktoren oder auch die Formwiderstände, so fällt auf, daß sie sich aus einem Formwiderstand des Einzelkörpers im unendlich ausgedehnten Medium (nach Tabelle 3) und einer Abstandsfunktion  $A^*$  zusammensetzen. Diese Abstandsfunktion hängt sowohl von der Form des Einzelkörpers als auch von der Art der gegenseitigen Anordnung der beiden Körper ab. Der Formwiderstand zweier gleicher Kugeln z. B. ergibt sich als zweifache Differenz zwischen dem Einzelwiderstand und der Abstandsfunktion—als Folge der vorzeichenverschiedenen Ergiebigkeiten von Quelle und Senke.

$$R_{2K}^* = 2(R_K^* - A_K^*); \quad F_{2K}^* = 1/R_{2K}^* = 1/2(R_K^* - A_K^*). \quad (60)$$

Als dimensionslose Abstandsfunktion sei das Produkt  $rA^*$  eingeführt. Für zwei gleich große Kugeln, Fall 1, Tab. 4, liest man ab

$$rA^K = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{r}{A}. \quad (61)$$

Tabelle 4. Zwei gleichartige Körper im unendlich ausgedehnten Medium

geometr. Form	Formfaktor	Bemerkungen	Formwiderstands-faktor	Lite-ratur
 <p>Kugeln in großem Abstand</p>	$F_r^* = \frac{4\pi}{2(1 - \frac{r}{A})}$	$A \geq 5r$ für $A \geq 2r$ Fehler 1%	$rR_{2K}^* = \frac{1}{4\pi} 2 \left[ 1 - \frac{r}{A} \right] = rR_{2K}^*$ $rR_{2K}^* = 2[rR_K^* - rA_K^*]$ $R_K^* = \frac{1}{4\pi r}$ ; $A_K^* = \frac{1}{4\pi r} \cdot \frac{r}{A}$	[15] [19]
 <p>Kugeln in kleinem Abstand</p>	$F_r^* = 4\pi \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{r}{A} + \left(\frac{r}{A}\right)^2 + \left(\frac{r}{A}\right)^3 + 2\left(\frac{r}{A}\right)^4 + 3\left(\frac{r}{A}\right)^5 + \dots \right]$	$2r < A < 5r$		[19]
 <p>Kugeln unterschiedlicher Größe</p>	$F_{r_2}^* = \frac{4\pi}{\frac{r_2}{r_1} \left[ 1 - \frac{(r_2/A)^4}{1 - (r_1/A)^2} \right] - \frac{2r_2}{A}}$	$A \geq 5r_2$		[15]
 <p>Drahtstücke parallel</p> <p>(Für parallele Bandstücke der Breite <math>2a</math> ist zu setzen <math>r = a/2</math>)</p>	$F_r^* = \frac{4\pi}{2 \left[ \ln \frac{2l}{r} - \frac{\sqrt{A^2 - (2l)^2}}{A} \right]}$	$A \geq 5r$ $r \ll l$	$rR_{2Z}^* = \frac{1}{4\pi} 2 \left[ \ln \frac{2l}{r} - \ln \frac{A}{\sqrt{A^2 - (2l)^2}} \right]$ $rR_{2Z}^* = 2[rR_Z^* - rA_{2Z}^*]$	[15] [19] [22]
 <p>Drahtstücke fluchtend</p> <p>(Für fluchtende Bandstücke der Breite <math>2a</math> ist zu setzen <math>r = a/2</math>)</p>	$F_r^* = \frac{4\pi}{2 \left[ \ln \frac{2l}{r} \sqrt{\frac{A-1}{A+1}} \right]}$ $F_r^* = \frac{4\pi}{2 \left[ \ln \frac{4l}{\sigma} \sqrt{\frac{A-l}{A+l}} \right]}$	$(A - 2l) \geq 5r$ $r \ll l$	$rR_{2Z}^* = \frac{1}{4\pi} 2 \left[ \ln \frac{2l}{r} - \ln \sqrt{\frac{A+l}{A-l}} \right]$ $rR_{2Z}^* = 2[rR_Z^* - rA_{2Z}^*]$	[15] [19] [22]
 <p>Kreisscheiben parallel</p>	$F_r^* = \frac{4\pi}{2 \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan r/A \right]}$	$A \geq 5r$	$rR_{2S}^* = \frac{1}{4\pi} 2 \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan r/A \right]$ $rR_{2S}^* = 2[rR_S^* - rA_S^*]$	[22]
 <p>Kreisringe (Drahte) parallel</p>	$F_r^* = \frac{4\pi}{2 \left[ \frac{1}{\pi} \ln \frac{8l}{p} - \frac{1}{\sqrt{(2r)^2 + A^2}} K(k) \right]}$	$r > 20p$ $A \geq 5p$ $k^2 = \frac{1}{1 + (A/2r)^2}$	$rR_{2R}^* = \frac{1}{4\pi} 2 \left[ \frac{1}{\pi} \ln \frac{8l}{p} - \frac{K(k)}{\sqrt{(2r)^2 + A^2}} \right]$ $rR_{2R}^* = 2[rR_R^* - rA_R^*]$	[15] [22]

In Tabelle 4 sind dimensionslose Abstandsfunktionen auch für Zylinderstücke  $rA_Z^*$ , Kreisscheiben  $rA_S^*$  und Kreisringe  $rA_K^*$  aufgeführt. Bei großer Entfernung der Körper wird die Abstandsfunktion vernachlässigbar klein; der Widerstand der Wärmeleitung hängt dann allein von jedem der beiden Körper ab und beträgt das Doppelte des Wertes des jeweiligen Einzelkörpers. Der Formfaktor ist in diesem Fall nur halb so groß als bei Wärmeabgabe an die gesamte Hüllkugel.

7.4. Körper vor isothermer oder adiabater ebener Wand

Potentialfeldberechnungen für Körper vor einer Wand lassen sich mit Hilfe der Methode der fiktiven Quellen und Senken oder des Spiegelungsprinzips durchführen. Bei ersterem Verfahren wird der Wärmequelle vor der Wand eine fiktive Senke gleicher

negativer Ergiebigkeit hinter der Wand gegenübergestellt. Es ergeben sich dabei Anordnungen und Wärmestromverteilungen wie in Kapitel 7.3 besprochen.

Die Wand als isotherme Ebene wird im Abstand  $A/2$  zwischen den Körpern liegen. Für die Wärmeleitung von einem Körper zur isothermen Wand verkürzen sich alle Stromlinien auf die Hälfte. Damit halbiert sich auch der Formwiderstand; der Formkoeffizient wie auch der Formfaktor verdoppeln sich. Es gilt für Anordnungen nach Bild 6

$$F_{\text{isoth. Wand}}^* = 2F_{2K}^* = \frac{1}{R_K^* - A_K^*}$$

$$R_{\text{isoth. Wand}}^* = \frac{1}{2}R_{2K}^* = R_K^* - A_K^*.$$

(62)

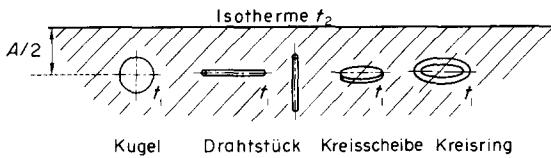


BILD 6. Einzelkörper im halbindefiniten Medium vor isothermer Wand.

Der Index  $2K$  bezeichnet speziell die Anordnung mit 2 gleichen Kugeln, der Index  $K$  die Anordnung der Einzelkugel im unendlich ausgedehnten Medium. Anstelle von  $K$  kann auch der Index  $Z$  für Zylinder,  $S$  für Kreisscheibe oder  $R$  für Kreisring stehen.

Es ergeben sich für eine isotherme Kugel in einem homogenen Medium im Abstand  $A/2$  vor einer isothermen Wand der Formkoeffizient und Formfaktor nach Gl. (62) zu

$$F^* = \frac{4\pi r}{1-r/A} \text{ bzw. } F_r^* = \frac{4\pi}{1-r/A} \quad (63)$$

Für  $A \gg r$  erhält man den Formfaktor der Einzelkugel im ausgedehnten Medium  $F_r^* = 4\pi$ .

Feldberechnungen um Körper vor *adiabaten* Wänden lassen sich nach dem Spiegelungsprinzip durchführen. Dabei steht einer Wärmequelle jenseits der Wand wieder eine gleich ergiebige, fiktive Quelle gegenüber, so daß in der Überlagerung das Vorzeichen des fiktiven Wärmestroms positiv bleibt.

Da bei adiabater Wand die Wärmeabgabe vom Körper an die unendliche Halbkugelschale erfolgt, läßt sich die Oberflächentemperatur des Körpers direkt als Übertemperatur auffassen.

Wegen der Gleichheit des Vorzeichens von realer und fiktiver Quelle stellt sich im Fall der adiabaten Wand der Formwiderstand dar als Summe des Widerstandes des Einzelkörpers und der Abstandsfunktion. Nach dem Prinzip dieser Ableitung ist die Abstandsfunktion identisch mit der von Gl. (62).

Es gilt für Anordnungen nach Bild 7, wobei wieder anstelle von  $K$  auch andere Indices stehen können,

$$F_{\text{adiab. Wand}}^* = \frac{1}{R_K^* + A_K^*} \quad (64)$$

$$R_{\text{adiab. Wand}}^* = R_K^* + A_K^*$$

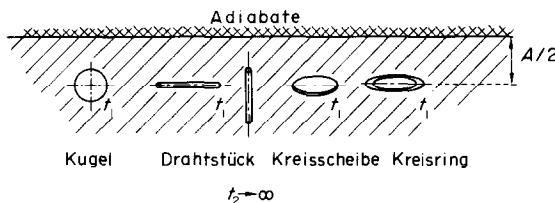


BILD 7. Einzelkörper im halbindefiniten Medium vor adiabater Wand.

Für eine isotherme Kugel in einem homogenen Medium im Abstand  $A/2$  vor einer adiabaten Wand ergibt sich nach Gl. (64) der Formkoeffizient und der Formfaktor zu

$$F^* = \frac{4\pi r}{1+r/A} \text{ bzw. } F_r^* = \frac{4\pi}{1+r/A} \quad (65)$$

Für  $A \gg r$  erhält man wieder  $F_r^* = 4\pi$ .

### 8. UNTERSCHIEDE IM AUFBAU DES FORMFAKTORS BEI ZYLINDER- UND EINZELKÖRPERANORDNUNGEN

Zur Berechnung des Wärmestroms nach Gl. (3) ist für achssymmetrische Anordnungen vorausgesetzt, daß die Längenausdehnung in Achsrichtung sehr viel größer ist als in radialer Richtung ( $L \gg r$ ).

Bei der Annahme eines unendlich großen Hüllzylinders ergibt sich für die Anordnung koaxialer Zylinderrohre ein Formkoeffizient ( $F^* = 2\pi L / \ln r_2/r_1$ ), dessen Nenner ( $\ln \rightarrow \infty$ ) und Zähler ( $L \rightarrow \infty$ ) gegen unendlich gehen.

Bei der Annahme einer unendlich großen Hüllkugelschale dagegen entfällt für  $r_2 \rightarrow \infty$  die unendliche Längenausdehnung im Nenner des Formkoeffizienten ( $F^* = 4\pi/(1/r_1 - 1/r_2)$ ), der damit besonders einfach wird.

Ein die Quelllinie in gleichbleibendem, unendlichem Abstand umhüllendes Nullpotential ist für eine lange zylindrische Anordnung im Gegensatz zur Einzelkörperanordnung nicht möglich. Die lange Zylinderquelle müßte ihre Umhüllende entweder an zwei Stellen durchstoßen oder ihr nahekommen.

Der einfache Aufbau der Formfaktoren aus Formwiderstandsfaktor der Einzelanordnung und dimensionsloser Abstandsfunktion ist somit nur für Anordnungen möglich, die aus Kugelquellen hergeleitet sind, da nur dafür eine Gegenisotherme in unendlichem Abstand angenommen werden kann.

Eine Anordnung von Wärmequellen, die aus Zylinderquellen hergeleitet sind, vor einer ebenen Oberfläche des halbindefiniten Raumes ist nur für eine isotherme Oberfläche sinnvoll; bei adiabater Oberfläche würde die Gegenisotherme im Unendlichen fehlen.

Die Kehrwertbildung bei Formfaktoren (Kap. 3) ist nur dann möglich, wenn die Vertauschung von Isothermen und Stromlinien *eindeutig* vorgenommen werden kann. Das ist möglich bei ebenen, auf zylindrische Quellen zurückgehende Anordnungen, nicht aber bei den von Kugelquellen herrührenden Konfigurationen.

#### LITERATUR

1. H. Gröber, S. Erk und U. Grigull, *Grundgesetze der Wärmeübertragung*, 3. Auflage, Neudruck. Springer, Berlin (1963).
2. F. Kreith, *Principles of Heat Transfer*. International Textbook, Scranton, Penn. (1966).
3. S. S. Kutateladse, *Fundamentals of Heat Transfer*. Edward Arnold, London (1963).
4. W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3rd edn. McGraw-Hill, New York (1954).
5. I. Langmuir, E. Q. Adams and G. S. Meikle, Flow of heat through furnace walls: the shape factor, *Trans. Am. Electrochem. Soc.* **24**, 53–81 (1913).
6. G. Kirchoff, G. Hansemann, *Ann. Phys. Chem.* **9**, 1–47 (1880).
7. E. Jahnke, F. Emde und F. Lösch, *Tafel höherer Funktionen*, 7. Aufl. Teubner, Stuttgart (1966).
8. Hütte, *Taschenbuch des Ingenieurs*, 1. Band, 28. Aufl. Wilhelm Ernst, Berlin (1955).
9. F. Oberhettinger und W. Magnus, *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik*. Springer, Berlin (1949).

10. M. Abramowitz and J. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York (1965).
11. S. Flügge, *Handbuch der Physik*, Band XVI. *Elektrische Felder und Wellen*. Springer, Berlin (1958).
12. F. Ollendorf, *Potentialfelder der Elektrotechnik*. Julius Springer, Berlin (1932).
13. E. Hahne und R. Schällig, Formfaktoren der Wärmeleitung für Anordnungen mit isothermen Rippen, *Wärme- und Stoffübertragung* 5, 39–46 (1972).
14. G. Franz und U. Grigull, Wärmeverluste von beheizten Rohrleitungen im Erdboden, *Wärme- und Stoffübertragung* 2, 109–117 (1969).
15. E. Weber, *Electromagnetic Fields*, Vol. 1, *Mapping of Fields*. John Wiley, New York; Chapman & Hall, London (1950).
16. M. J. Balcerzak and S. Raynor, Steady state temperature distribution and heat flow in prismatic bars with isothermal boundary conditions, *Int. J. Heat Mass Transfer* 3, 113–125 (1961).
17. J. C. Smith, J. E. Lind and D. S. Lermond, Shape factors for conductive heat flow, *A.I.Ch.E. Jl* 4, 330–331 (1958).
18. E. Warburg, *Über Wärmeleitung und andere ausgleichende Vorgänge*. Julius Springer, Berlin (1924).
19. K. Küpfmüller, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*. Springer, Berlin (1962).
20. O. Krischer, Das Temperaturfeld in der Umgebung von Rohrleitungen, die in der Erde verlegt sind, *Beih. Gesundh-Ingr* 59, 537–539 (1936).
21. G. Warnemünde, Dissertation TU Berlin, D 83 (1967).
22. F. Ollendorf, *Erdströme*. Julius Springer, Berlin (1928).
- 22a. F. Ollendorf, *Erdströme*, 2. Aufl. Birkhäuser, Basel (1969).
23. P. Moon and D. E. Spencer, *Field Theory for Engineers*. Van Nostrand, Princeton (1961).
24. S. S. Attwood, *Electric and Magnetic Fields*. Wiley, New York (1949).
25. R. Rüdemberg, Die Ausbreitung der Luft- und Erdfelder um Hochspannungsleitungen, besonders bei Erd- und Kurzschlüssen, *Elektrotech. Z.* 46, 1342–1346 (1925).
26. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*. McGraw-Hill, New York (1950).

#### SHAPE FACTOR AND SHAPE RESISTANCE FOR STEADY MULTIDIMENSIONAL HEAT CONDUCTION

**Abstract**—For a number of configurations, potential fields are calculated and discussed in literature. These solutions are critically revised and common characteristics are worked out. The separation of specific properties leads to the so-called shape factor depending solely on the geometric arrangement and being valid for all problems based on scalar potential fields.

The heat flux in steady heat conduction is considered here. With the shape factor given this is easily calculated even for complicated configurations. In literature, information on shape factors sometimes is confusing and ambiguous, therefore strict subdivision was observed according to basic solutions as found analytically for plane plates, coaxial tubes and spheres. The characteristics of these solutions are always demonstrated in the respective shape factors.

For single body arrangements a simple method of shape factor calculation is described. This, together with the possibility of interchanging isotherms and adiabates, or symmetric composition renders the about 50 shape factors given here as a basis of many other configurations.

#### FACTEUR DE FORME ET RESISTANCE DE FORME EN CONDUCTION THERMIQUE STATIONNAIRE MULTIDIMENSIONNELLE

**Résumé**—Les champs potentiels ont été calculés et discutés dans les publications scientifiques pour de nombreuses configurations géométriques. Ces solutions sont revues d'un point de vue critique et leurs caractéristiques communes sont mises en évidence. La séparation des propriétés spécifiques conduit à ce que l'on appelle facteur de forme, qui dépend uniquement de la configuration géométrique et qui est valable pour tous les problèmes relatifs aux champs potentiels scalaires.

On considère dans le présent article, le flux de chaleur en conduction thermique stationnaire. Ce dernier peut-être aisément calculé une fois le facteur de forme donné, même dans des configurations compliquées. Dans les publications, les informations sur les facteurs de forme sont parfois confuses et ambiguës, par conséquent une stricte distinction a été observée suivant les solutions de base calculées analytiquement pour les plaques planes, tubes et sphères coaxiaux. Les caractéristiques de ces solutions sont toujours décrites à l'aide de leurs facteurs de forme respectifs.

Pour les configurations comprenant un seul corps solide, une méthode simple de calcul du facteur de forme est décrite. Ce résultat, joint à la possibilité d'interchanger les isothermes et les adiabatiques, ou de réaliser des assemblages symétriques, constitue avec les quelques 50 facteurs de forme donnés dans l'article, la base de beaucoup d'autres configurations.

#### ФОРМ-ФАКТОР И СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

**Аннотация** — В литературе рассчитываются и обсуждаются потенциальные поля для многих конфигураций.

В настоящей работе критически пересмотрены эти решения и выработаны общие характеристики. Выделение специфических свойств приводит к так называемому форм-фактору, зависящему исключительно от геометрии и приемлемому для всех задач, рассматриваемых в рамках скалярных потенциальных полей. В работе рассматривается тепловой поток в случае стационарной теплопроводности. С помощью заданного форм-фактора поток легко рассчиты-

вается даже для сложных конфигураций. Информация по форм-фактору в литературе зачастую путанна и неоднозначна, поэтому было проведено четкое её подразделение в соответствии с фундаментальными решениями, найденными аналитически для плоских пластин, коаксиальных труб и сфер.

Характеристики этих решений всегда проявляются в соответствующих формах-факторах. Описывается простой метод расчета форм-фактора для единичных тел. Этот метод вместе с чередованием изотерм и адиабат или же симметричной композиции охватывает примерно 50 форм-факторов, являющихся основой для рассмотрения многих других конфигураций.